Formelsammlung Elektrodynamik

Gaußscher Satz: $\iiint_V \text{div } \vec{F} \mathrm{d}V = \oiint_{\partial V} \vec{F} \mathrm{d}\vec{A}$

Stokesscher Satz: $\iint_A \text{rot } \vec{F} \mathrm{d}\vec{A} = \oint_{\partial A} \vec{F} \mathrm{d}\vec{s}$

Fourier Transformation: $g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x) \exp(-ikx)$

Dirac'sche Delta Distribution: $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \ \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0)$

Integraldefinition: $\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \ \exp(ik(x - x_0))$

Vektoridentitäten: div rot$(\vec{A}) = 0$ rot grad$(\Phi) = 0$

Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$$

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Elektrostatik

Coulombkraft: $\vec{F} = q_1 \cdot q_2 \cdot \frac{\vec{r_1} - \vec{r_2}}{|\vec{r_1} - \vec{r_2}|^3}$

Elektrisches Feld: $\vec{E}(\vec{r}) = \iiint \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \mathrm{d}^3 r'$

Elektrisches Potential: $\Phi(\vec{r}) = \iiint \rho(r') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \mathrm{d}^3 r'$

Poisson-Gleichung: $\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}) \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$

Feldgleichungen Elektrostatik: $\boxed{\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \text{rot } \vec{E} = 0}$

Energie

Potentielle Energie der Ladung q: $W(\vec{r}) = q \cdot \Phi(\vec{r})$

Wechselwirkungsenergie: $W = \frac{1}{2} \iint \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \mathrm{d}^3 r \mathrm{d}^3 r'$

Potentielle Energie: $W = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r})\Phi(\vec{r}) \mathrm{d}^3 r$

Feldenergie: $W = \frac{1}{8\pi} \int \vec{E}^2(\vec{r}) \mathrm{d}^3 r$

Energiedichte: $w = (\vec{r}) = \frac{1}{8\pi} |E(\vec{r})|^2$

Randwertprobleme

Dirichlet Randbedingungen: $\Phi_{|R} = \Phi_0(\vec{r})$

Neumann Randbedingungen: $\frac{\partial \Phi}{\partial n}_{|R} = -4\pi\sigma(\vec{r})$

am Rand: $\vec{t} \cdot \vec{E}(\vec{r})_{|R} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\sigma(\vec{r})$

Anwendungen

Bildladungsmethode: $\Phi(\vec{r}) = q \left(\frac{1}{|\vec{r} + a \cdot \vec{e}_x|} - \frac{1}{|\vec{r} - a \cdot \vec{e}_x|} \right)$

Greensche Fkt.: $\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') \Rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

Kondensator: $Q_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij}\Phi_j \quad C = \frac{Q}{U}$

Kugelkondensator: $C = \frac{a \cdot b}{b - a}$

Konfokale Ellipsoide: $C = \frac{2l}{\ln\left(\frac{(a_1+l)}{(a_1-l)}\frac{(a_2+l)}{(a_2-l)}\right)}$

Legendre Polynome und Kugelfunktionen

Separationsansatz Laplace-Gleichung: $\Phi(r, \vartheta, \phi) = \frac{U(r)}{r} P(\cos(\vartheta)) Q(\phi)$

$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}r^2} - \frac{\lambda}{r^2} U(r) = 0 \qquad Q(\phi) = \exp(im\phi), m = 0, \pm1, \pm2, \pm3 \ldots$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1 - x^2)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - x^2}\right) P(x) = 0$

Legrendre-Polynome: $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x} (x^2 - 1)^l$

Zylindersymmetrische Lösung: $\Phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\vartheta)$

Zugeord. Legendre-Pol.: $p_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}} (x^2 - 1)^l$

Kugelfunktionen: $Y_{lm}(\vartheta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi \cdot (l+m)!}} P_l^m(\cos\vartheta) \exp(im\phi)$

Multipolentwicklung

Multipolentwicklung: $\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \ldots$

Ladung: $q = \iiint_V d^3 r \rho(\vec{r}) \quad \Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})$

Dipolmoment: $p_i = \iiint_V d^3 r x_i \rho(\vec{r})$

Quadrupolmoment: $Q_{ij} = \iiint_V d^3 r (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{r})$

Elektrisches Feld: $\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = \frac{3\vec{r}(\vec{p} \cdot \vec{r}) - \vec{p} r^2}{r^5}$

Magnetostatik

Stromdichte: $\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \cdot \vec{v}(\vec{r}, t)$

Kontinuitätsgleichung: div $\vec{j} + \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0$

Kraftgesetz: $\mathrm{d}\vec{F}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$

Gesetz von Biot-Savart: $\mathrm{d}\vec{B}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \mathrm{d}\vec{l} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \iiint_V \mathrm{d}^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

Lorentzkraft: $\vec{F} = q \cdot \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}$

Feldgleichungen

Vektorpotential: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \iiint \mathrm{d}^3 r' \frac{\vec{j}(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r})$

Eichtransformation: $\vec{A}(\vec{r}) \to \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r})$

Coulombeichung: div $\vec{A}(\vec{r}) = 0 \quad \Rightarrow \Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r})$

Feldgleichungen Magnetostatik: $\boxed{\text{div } \vec{B}(\vec{r}) = 0, \quad \text{rot } \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r})}$

Ampere Gesetz: $\oint_C \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \iint_F \mathrm{d}\vec{F} \cdot \vec{j}$

Magnetischer Fluss: $\Phi_m = \iint_F \mathrm{d}\vec{F} \cdot \vec{B}$

Selbstinduktivität: $L = \frac{N}{c}\frac{\Phi_m}{I}$

Magnetischer Dipol

Magnetisches Dipolmoment: $\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \iiint_V \mathrm{d}^3r\ \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})$

Magnetisches Feld: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{3\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{\mu}) - \vec{\mu}r^2}{r^5}$

Punktdipol: $\vec{j} = \frac{-c}{4\pi}\Delta\vec{A} = -c(\vec{\mu}\times\vec{\nabla})\delta(\vec{r})$

Gyromagnetisches Verhältnis: $\gamma \quad \vec{\mu} = \gamma\vec{L} = g\frac{q}{2mc}\vec{L}$

Bohrsches Magneton: $\mu_b = \frac{e\hbar}{2m_e c}$

Drehmoment: $\vec{M} = \vec{\mu}\times\vec{B}_{\text{extern}}$

Potentielle Energie: $W = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}_{\text{extern}}$

Maxwell-Gleichungen: Allgemeine Eigenschaften

Kraftdefinition: $\vec{F} = q\cdot\vec{E}(t,\vec{r}) + q\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}(t,\vec{r})$

Induktionsgesetz: $U = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{A(t)} \mathrm{d}\vec{A}(t)\cdot\vec{B}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_m(t)$

Verschiebungsstrom: $\oint_C \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_A \mathrm{d}\vec{A}\cdot\vec{E}$

Energiedichte: $w_{em}(\vec{r},t) = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$

Poyntingvektor: $\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{c}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{B})$ (Energiestromdichte)

Poynting-Theorem: $\frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{S} = -\vec{j}\cdot\vec{E}$

Impulsdichte: $\vec{g}_{em} = \frac{1}{4\pi c}(\vec{E}\times\vec{B}) = \frac{\vec{S}}{c^2}$

Allgemeine Lösung

Elektrisches Feld: $\vec{E}(\vec{r},t) = -\text{grad}\ \Phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}$

Eichtransformation Potential: $\Phi(\vec{r},t) \to \Phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda(\vec{r},t)}{\partial t}$

Eichtransformation Vektorpotential: $\vec{A}(\vec{r}) \to \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r})$

Lorentzeichung: $\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi(\vec{r},t)}{\partial t} = 0$

Entkoppelte Maxwell-Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\Phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi(\vec{r},t)}{\partial t^2} &= -4\pi\rho(\vec{r},t)\\ \Delta\vec{A}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t)\end{aligned}}$$

$\Phi_{\text{hom}}(\vec{r},t) = \Re\iiint \mathrm{d}^3k[a_1(\vec{k}) + ia_2(\vec{k})]\exp[i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)]$

$\Phi_{\text{ret}}(\vec{r},t) = \iiint \mathrm{d}^3r'\frac{\vec{j}(\vec{r'}, t - \frac{|\vec{r}-\vec{r'}|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$

Kovarianz

Notation: $j^\alpha = (c\rho, j_x, j_y, j_z), \quad A^\alpha = (\Phi, A_x, A_y, A_z)$

Lorentzfaktor: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$

Kontinuitätsgleichung: $\partial_\alpha j^\alpha(x) = 0$

relativistische Energie: $E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$

Lorentzeichung: $\partial_\alpha A^\alpha = 0$

d'Alembert-Operator: $\Box = \partial_\beta\partial^\beta = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$

Feldstärketensor: $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z\\ E_x & 0 & -B_z & B_y\\ E_y & B_z & 0 & -B_x\\ E_z & -B_y & B_x & 0\end{pmatrix} \qquad (F_{\alpha\beta}) = (\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}F^{\gamma\delta})$$

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z\\ B_x & 0 & E_z & -E_y\\ B_y & -E_z & 0 & E_x\\ B_z & E_y & -E_x & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\varepsilon^{\alpha\beta\delta\gamma}F_{\delta\gamma})$$

Kovariante Maxwellgleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{Potentiale: } \Box A^\alpha(x) = \frac{4\pi}{c}j^\alpha(x)\\ &\text{Allgemein: } \partial_\beta F^{\beta\alpha} = \frac{4\pi}{c}j^\alpha \quad \partial_\beta(\tilde{F})^{\beta\alpha} = 0\end{aligned}}$$

Kovariante Lorentzkraft: $m\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = \frac{q}{c}F^{\alpha\beta}u_\beta$

Konstanz der Energie: $mc^2 + mc^2(\gamma - 1) + q\cdot\Phi(\vec{r}) = \text{const.}$

Energie-Impuls-Tensor: $T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}(F^\alpha_\gamma F^{\gamma\beta} + \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}F^{\gamma\delta})$

Differentieller Energieerhaltungssatz: $\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{c}F^{\beta\gamma}j_\gamma$

Lagrangeformalismus

Lagrange-Funktion: $L(t,q,\dot{q}) = T(t,q,\dot{q}) - U(t,q)$

Euler-Lagrange Gleichung: $\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0}$

L-Funktion der MG: $L(x^\gamma, A^\beta, \partial^\alpha A^\beta) = -\frac{1}{16\pi}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} - \frac{1}{c}A^\alpha j_\alpha$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial(\partial^\alpha A^\beta)} - \frac{\partial L}{\partial A^\beta} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \partial^\alpha F_{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c}j_\beta$$

Maxwell-Gleichungen: Anwendungen

Ebene Wellen

Vakuum (quellenfrei): $j^\alpha = 0, \quad \Box A^\alpha = 0, \quad \partial_\alpha A^\alpha = 0$

Eichbedingung für $j^\alpha = 0:\ A^0 \equiv \Phi = 0$

Strahlungseichung: $\Box\vec{A}(\vec{r},t) = 0, \quad \operatorname{div}\vec{A}(\vec{r},t) = 0, \quad \Phi(\vec{r},t) = 0$

Monochrom. ebene Welle: $\vec{A}(\vec{r},t) = \Re\ \vec{A}_0\exp[i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)]$

Frequenz der Welle: $\omega = c|\vec{k}| = ck$

allgemein: $\Box(\exp[-ik_\mu x^\mu]) = 0 \Rightarrow -k_\alpha k^\alpha\exp(-ik_\mu x^\mu) = 0$

Wellenvektor ist Nullvektor: $k_\alpha k^\alpha = \vec{k}^2 - k_0^2 = 0$

Beziehungen: $\vec{A}_0 \perp \vec{k}, \quad \vec{S}\parallel\vec{k}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$

Polarisation: $\vec{E}(\vec{r},t)\perp\vec{k}, \quad \vec{B}(\vec{r},t)\perp\vec{k}, \quad \vec{E}(\vec{r},t)\perp\vec{B}(\vec{r},t)$

Phasengleichheit: $|\vec{E}(\vec{r},t)| = |\vec{B}(\vec{r},t)|$

Energie und Impuls

Energiestromdichte: $\langle\vec{s}\rangle = \langle w_{em}\rangle c\cdot\frac{\vec{k}}{k}$

Frequenz Unschärfe der FT: $\Delta\nu \geq \frac{c}{l}$ ($l-$ Signallänge)

Quantisierung der Energie: $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Impulsdichte: $\vec{p} = \iiint d^3r\langle\vec{s}\rangle = \hbar\cdot\vec{k}$

Elektrodynamik in Materie

Polarisation: $\vec{P} = \frac{\vec{p}}{V}$ Magnetisierung: $\vec{M} = \frac{\vec{\mu}}{V}$

Elektrisches Feld: $\vec{E} = \vec{D} - 4\pi\vec{P}$

Magnetisches Feld: $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$